Comment coincer la bulle ?

On crée dans un récipient plein d'eau sur une hauteur H (de $z = 0$ au fond à $z = H$ en surface) une onde acoustique stationnaire verticale dont la pression acoustique est :

$$p(z,t) = p_m \cos(\omega\, t + \varphi) \cos(k\, z + \psi)$$

Question 1 :

Quel est le champ de vitesse correspondant ? Quelles sont les conditions aux limites ? En déduire la valeur de ψ et les valeurs possibles de k. Monter qu'on peut choisir $\varphi = 0$ sans nuire à la généralité du problème. Comment générer une telle onde ?

Dans l'approximation acoustique (voir le cours), on a

$$\mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p = k\, p_m \cos(\omega\, t + \varphi) \sin(k\, z + \psi)\, \overrightarrow{e_z}$$

$$\text{d'où} \qquad \overrightarrow{v} = \frac{k\, p_m}{\mu_0\, \omega} \sin(\omega\, t + \varphi) \sin(k\, z + \psi)\, \overrightarrow{e_z}$$

Au fond du récipient, le vitesse ne peut pas avoir de composante selon Oz sinon l'eau pénétrerait dans le verre, c'est absurde. On a donc $v_z(0) = 0$ d'où $\sin(\psi) = 0$. ψ étant défini modulo $2\,\pi$, on pourrait, semble-t-il, hésiter entre 0 et π ce qui serait, en fait, un faux problème car $a\, \sin(k\, z + \pi) = -a\, \sin(k\, z)$, entendons par là que $p_m = a$ et $\psi = \pi$ d'une part et $p_m = -a$ et $\psi = 0$ d'autre part sont deux façons de décrire une même onde. On choisira bien évidemment la plus simple soit $\psi = 0$

A la surface l'air impose une pression stationnaire, donc la composante sinusoïdale de la pression de l'eau en $z = H$ doit s'annuler, soit, en reportant $\psi = 0$,

$$\cos(k\, H) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = (2\, p + 1)\, \frac{\pi}{2\, H} \quad p \in \mathbb{N}$$

On retrouve les conditions de résonance d'un tuyau sonore ouvert à une extrémité et fermé à l'autre.

Comme un changement d'origine des temps modifie la valeur de φ et que les conditions initiales ne sont pas précisées et n'ont du reste aucune incidence sur la suite problème, on peut toujours choisir l'origine des temps de sorte que $\varphi = 0$. On prendra donc

$$p(z,t) = p_m \cos(\omega\, t) \cos(k\, z) \qquad \text{avec} \qquad k = (2\, p + 1)\, \frac{\pi}{2\, H} \quad p \in \mathbb{N}$$

où bien sûr, $\omega = c\, k$ (c désigne ici la vitesse du son dans l'eau).

Comme pour la corde de Melde, il faudra exciter cette onde avec hydrophone (microphone conçu pour être immergé) avec une des fréquences propres trouvées plus haut pour obtenir une résonance aiguë. On choisira du reste une fréquence propre dans le domaine des ultrasons pour le confort de nos fragiles oreilles.

Question 2 :

Une bille solide de rayon a, petit devant la longueur d'onde, est placée dans l'eau. Quelle est la résultante des forces de pression (utiliser l'équivalent volumique) et sa moyenne temporelle ? Peut-elle compenser la pesanteur ?

La bille est soumise à son poids et à la résultante des forces de pression que l'on va calculer avec l'équivalent volumique, le volume est assez petit pour que l'on multiplie l'équivalent volumique au centre par le volume $V = \frac{4\,\pi}{3}\, a^3$ au lieu d'intégrer. En appelant μ la masse volumique du solide le poids est :

$$\overrightarrow{P} = \mu\, V\, \overrightarrow{g} = -\mu\, V\, g\, \overrightarrow{e_z}$$

et la résultante des forces de pression

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_{tot}\, V$$

où p_{tot} est la pression totale, somme de la pression p_0 en l'absence d'onde et de la pression acoustique ; le seul piège étant d'oublier que pour un liquide p_0 varie de façon sensible avec l'altitude, faute de quoi on oublierait la poussée d'Archimède. Donc, en notant μ_0 la masse volumique de l'eau

$$p_{tot} = p_0(z) + p(z,t) = p_{atm} + \mu_0\, g\,(H - z) + p_m\, \cos(\omega\, t)\, \cos(k\, z)$$

$$\text{d'où} \qquad -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_{tot} = [\mu_0\, g + k\, p_m\, \cos(\omega\, t)\, \sin(k\, z)]\, \overrightarrow{e_z}$$

$$\text{et, en projection sur } Oz \qquad F_{tot} = -(\mu - \mu_0)\, V\, g + k\, p_m\, V\, \cos(\omega\, t)\, \sin(k\, z)$$

Intuitivement, on ne peut espérer un équilibre que si la moyenne temporelle de cette force est nulle, or

$$\langle F_{tot} \rangle = -(\mu - \mu_0)\, V\, g \neq 0$$

sauf le cas fort peu probable où $\mu = \mu_0$

Question 3 :

On remplace la bille par une bulle de gaz. La bulle se met instantanément en équilibre de pression avec l'eau. Justifiez qu'en bonne approximation, cela se fait de manière adiabatique réversible. Calculer le volume de la bulle en fonction de la pression acoustique. On donnera le résultat par son développement de Taylor à l'ordre un. Quelle est la résultante des forces de pression et quelle en est la valeur moyenne ? Expliquer comment coincer la bulle.

Cette fois la bulle a une masse fixe et un poids fixe (du reste négligeables, on n'en tiendra pas compte) mais un volume variable. L'air et l'eau sont peu conducteurs de la chaleur et, en régime sinusoïdal, la différence de température sera alternativement positive et négative : les échanges thermiques seront négligeables et de plus on n'est jamais loin de l'équilibre thermique. Le modèle adiabatique réversible est donc une très bonne approximation. En appelant V_0 le volume en l'absence d'onde, on a

$$p_{tot}\, V^\gamma = p_0\, V_0^\gamma$$

$$V = V_0 \left(\frac{p_{tot}}{p_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} = V_0 \left(1 + \frac{p(z,t)}{p_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \approx V_0 \left(1 - \frac{1}{\gamma}\frac{p(z,t)}{p_0}\right)$$

La force totale, en projection sur Oz est donc

$$F_{tot} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\, V = [\mu_0\, g + k\, p_m\, \cos(\omega\, t)\, \sin(k\, z)]\, V_0 \left(1 - \frac{1}{\gamma}\frac{p_m\, \cos(\omega\, t)\, \cos(k\, z)}{p_0}\right)$$

Le seul terme non nul de la moyenne temporelle est celui qui fait intervenir $\langle \cos^2(\omega\, t)\rangle = 1/2$, d'où

$$\langle F_{tot} \rangle = -\frac{1}{2\,\gamma\, p_0}\, k\, p_m^2\, V_0\, \sin(k\, z)\, \cos(k\, z)$$

moyenne qui peut être nulle là où soit $\sin(k\, z)$, soit $\cos(k\, z)$ s'annule, c'est-à-dire respectivement aux ventres et aux nœuds de pression. Reste à savoir si cet équilibre putatif est stable ou non.

Question 4 :

Dans les conditions précédents, on cherche l'altitude de la bulle sous la forme $z(t) = z_0 + \varepsilon(t)$ ou ε est une fonction censée rester petite. Retrouver par cette approche la condition pour coincer la bulle.

On va résoudre $m\,\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = F_{tot}$ avec m masse de la bulle ; en linéarisant F_{tot}, on tire, en assimilant z à z_0 dans les termes sinusoïdaux

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}t^2} = V_0\,\left[\mu_0\,g - \frac{1}{2\,\gamma\,p_0}\,k\,p_m^2\,\sin(k\,z_0)\,\cos(k\,z_0)\right] + \cdots$$
$$V_0\,\left[k\,p_m\,\sin(k\,z_0) - \frac{\mu_0\,g}{\gamma}\,\frac{p_m\,\cos(k\,z_0)}{p_0}\right]\,\cos(\omega\,t) - \cdots$$
$$\frac{1}{2\,\gamma\,p_0}\,k\,p_m^2\,V_0\,\sin(k\,z_0)\,\cos(k\,z_0)\,\cos(2\,\omega\,t)$$

L'intégration des deux derniers termes donne des fonctions sinusoïdales, compatibles avec l'hypothèse d'une bulle confinée autour de z_0. Si le premier terme était non nul, $\varepsilon(t)$ aurait une composante fonction du second degré du temps, il n'y aurait pas d'équilibre. Ce terme doit être nul et l'on retrouve la condition de la question précédente.

Question 5 :
Discutez de la stabilité de l'équilibre ainsi obtenu.

Mais cela ne suffit pas car même nul, ce terme donnerait une fonction du premier degré du temps donc une fonction $z(t)$ qui ne resterait pas voisine de z_0

Il faut raisonner plus finement. Ce premier terme s'écrit, puisque z peut potentiellement s'éloigner de z_0 :

$$F_1 = V_0\,\left[\mu_0\,g - \frac{1}{4\,\gamma\,p_0}\,k\,p_m^2\,\sin(2\,k\,z)\right]$$

Autour d'une position d'équilibre z_0 telle que

$$0 = V_0\,\left[\mu_0\,g - \frac{1}{4\,\gamma\,p_0}\,k\,p_m^2\,\sin(2\,k\,z_0)\right]$$

un développement de Taylor à l'ordre un, avec $z = z_0 + \varepsilon$, donne

$$\sin(2\,k\,z) = \sin(2\,k\,z_0) + 2\,k\,\varepsilon\,\cos(2\,k\,z_0)$$

$$\text{d'où}\quad F_1 = V_0\,\left[\mu_0\,g - \frac{1}{4\,\gamma\,p_0}\,k\,p_m^2\,\left(\sin(2\,k\,z_0) + 2\,k\,\varepsilon\,\cos(2\,k\,z_0)\right)\right]$$

où les deux premiers termes se simplifient (cf la condition d'équilibre évoquée un peu plus haut) ; on en déduit :

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}t^2} = V_0\,\left[-\frac{1}{4\,\gamma\,p_0}\,k\,p_m^2\,\left(2\,k\,\varepsilon\,\cos(2\,k\,z_0)\right)\right] + \text{les autres termes}$$
$$= -\frac{k^2\,p_m^2\,V_0}{2\,\gamma\,p_0}\,\cos(2\,k\,z_0)\,\varepsilon + \text{termes sinusoïdaux en } t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k^2\,p_m^2\,V_0}{2\,m\,\gamma\,p_0}\,\cos(2\,k\,z_0)\,\varepsilon = \text{termes sinusoïdaux en } t$$

L'équation homogène donc des solutions exponentielles (donc la bulle n'est pas coincée) si $\cos(2\,k\,z_0)$ est négatif et des solutions sinusoïdales (donc bulle coincée) sinon. Il y a donc équilibre stable si d'une part

$$-\frac{V_0}{4\,\gamma\,p_0}\,k\,p_m^2\,\sin(2\,k\,z_0) = V_0\,\mu_0\,g = m\,g \approx 0$$

$$\text{soit}\qquad \sin(2\,k\,z_0) \approx 0$$

$$\text{et d'autre part}\quad \cos(2\,k\,z_0) > 0$$

ce qui correspond à

$$2\,k\,z_0 \approx 2\,p\,\pi \qquad p \in \mathbb{N}$$

et avec $k = 2\,\pi/\lambda$

$$4\,\pi\,z_0 \approx 2\,p\,\pi\,\lambda \qquad p \in \mathbb{N}$$

$$z_0 \approx p\,\frac{\lambda}{2} \qquad p \in \mathbb{N}$$

c'est à dire au niveau des ventres de pression.